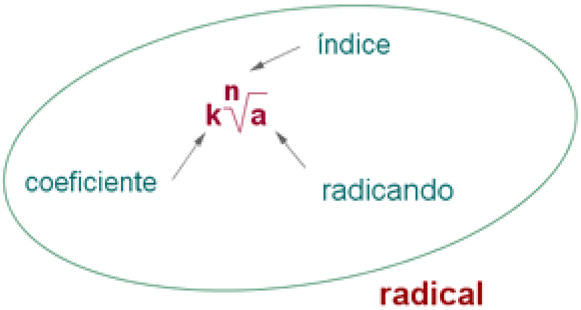
Radicales

Un **radical** es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que n $\in \mathbb{N}$ y a $\in \mathbb{R}$; con tal que cuando *a* sea negativo, *n* ha de ser impar.



$\sqrt{64} = \pm 8$ $\qquad$ $\sqrt{-64} \notin \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-8} = -2$

Potencias y radicales

Se puede expresar un **radical** en forma de **potencia**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$$

Radiales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Si se multiplican o dividen el **índice** y el **exponente** de un **radical** por un mismo **número natural**, se obtiene otro **radical equivalente**.

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

Simplificación de radicales

Si existe un **número natural** que divida al **índice** y al **exponente** (o los exponentes) del radicando, se obtiene un **radical simplificado**.

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Reducción de radicales a índice común

1 Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice

2 **Dividimos el común índice por cada uno de los índices** y cada resultado obtenido **se multiplica por sus exponentes** correspondientes.

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} \qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$$

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} \qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$$

Extracción e introducción de factores en un radical

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

1 Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

$$\sqrt[3]{5^2}$$

2 Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

$$\sqrt[3]{5^5} = 5\sqrt[3]{5^2}$$

3 Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

Introducción de factores dentro del signo radical

Se **introducen** los **factores** elevados al **índice** correspondiente del **radical**.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\, b}$$

$$2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6}$$

$$= \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

Suma de radicales

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2-4+1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3-2-1)\sqrt[4]{5} = 0$$

$$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Producto de radicales

Radicales del mismo índice

Para **multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice**.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación e**xtraeremos factores del radical**, si es posible.

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego **se multiplican**.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27}=$$

$$m.c.m.(2,3,4)=12$$

$$\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{\left(3^2\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(3^3\right)^3}=\sqrt[12]{3^6\cdot 3^8\cdot 3^9}=\sqrt[12]{3^{23}}=3\sqrt[12]{3^{11}}$$

$$\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{36}=$$

$$\text{m.c.m.}(2,3)=6$$

$$\sqrt[6]{12^3}\cdot\sqrt[6]{36^2}=\sqrt[6]{\left(2^2\cdot 3\right)^3\cdot\left(2^2\cdot 3^2\right)^2}=\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3\cdot 2^4\cdot 3^4}=\sqrt[6]{2^{10}\cdot 3^7}=6\sqrt[6]{2^4\cdot 3}$$

Cociente de radicales

Radicales del mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} =$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego **se dividen.**

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

Cuando terminemos de realizar una operación **simplificaremos el radical**, si es posible.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^8\right)^3}{\left(2^4\right)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} =$$

$$= \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\,\sqrt[3]{2^2} = 4\,\sqrt[3]{4}$$

Potencia de radicales

Para elevar un **radical** a una **potencia**, se eleva a dicha **potencia** el **radicando** y se deja el **mismo índice**.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 =$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{\left(2 \cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4}\cdot\sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{(2^2\cdot 3)^4}\cdot 18}{\sqrt{(2\cdot 3)^4}} =$$

$$= \frac{18\cdot\sqrt[3]{2^8\cdot 3^4}}{\sqrt{2^4\cdot 3^4}} = 18\sqrt[6]{\frac{(2^8\cdot 3^4)^2}{(2^4\cdot 3^4)^3}} = 18\sqrt[6]{\frac{2^{16}\cdot 3^8}{2^{12}\cdot 3^{12}}} =$$

$$= 18\sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Raíz de un radical

La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{2}}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{2}}}} = \sqrt[24]{\mathbf{2}}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(2^4)^4\cdot\mathbf{2}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{2}^{16}\cdot\mathbf{2}}}} = \sqrt[24]{\mathbf{2}^{17}}$$

Racionalización de radicales

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1 **Racionalización** del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

2 **Racionalización** del tipo $\frac{a}{b\,\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\,\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\,\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\,\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\,\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\,\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\,\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\,\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\,\sqrt[5]{8}}{3\,\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\,\sqrt[5]{8}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3 **Racionalización** del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a + b \quad \rightarrow \quad a - b$$

$$-a + b \quad \rightarrow \quad -a - b$$

$$a - b \quad \rightarrow \quad a + b$$

$$-a - b \quad \rightarrow \quad -a + b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{\left(4 - 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)} = \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{\left(4 - 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{16 - 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \left(5 + 2\sqrt{6}\right)}{\left(5 - 2\sqrt{6}\right) \cdot \left(5 + 2\sqrt{6}\right)} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{12}}{5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 3}}{25 - 4 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}{25 - 24} = 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$